問題

問題 1. x, y は実数とする。次の命題の逆、対偶、裏を述べ、真偽をそれぞれ調べよ。

(1) $x = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$　　(2) $xy > 1 \ \Rightarrow \ x > \dfrac{1}{y}$

問題 2. n は整数とする。対偶を利用して、次の命題を示せ。

(1) $n^2 + 2$ が偶数ならば n は偶数である

(2) $5n + 3$ が偶数ならば n は奇数である

問題 3. $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

(1) $1 + 2\sqrt{2}$ が無理数である。　　(2) $-2 + 3\sqrt{2}$ が無理数である。

問題 4. 次のことを背理法を用いて証明せよ。

(1) $\sqrt{2}$ が無理数である。　　(2) $\sqrt{6}$ が無理数である。

練習

練習 1.　x, y は実数とする。次の命題の逆、対偶、裏を述べ、真偽をそれぞれ調べよ。

(1) $x > 0 \ \Rightarrow \ xy > 0$　　(2) $x = y \ \Rightarrow \ x - y = 0$

練習 2.　n は整数とする。対偶を利用して、次の命題を示せ。

(1) $n^2 + 3$ が奇数ならば n は偶数である

(2) $3n + 4$ が奇数ならば n は奇数である

練習 3.　$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

(1) $2 + 4\sqrt{3}$ が無理数である。　(2) $-1 + 2\sqrt{3}$ が無理数である。

練習 4.　次のことを背理法を用いて証明せよ。

(1) $\sqrt{2}$ が無理数である。　(2) $\sqrt{10}$ が無理数である。

解答

問題 1.

(1) 逆「$xy = 0 \Rightarrow x = 0$」、偽　対偶「$xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$」、真　裏「$x \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$」、偽

(2) 逆「$x > \dfrac{1}{y} \Rightarrow xy > 1$」、偽　対偶「$x \leqq \dfrac{1}{y} \Rightarrow xy \leqq 1$」、偽　裏「$xy \leqq 1 \Rightarrow x \leqq \dfrac{1}{y}$」、偽

問題 2.

(1) (証明)

対偶「n が奇数ならば $n^2 + 2$ は奇数である」を証明する。

n が奇数のとき、ある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表される。このとき

$n^2 + 2 = (2k + 1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 1 + 2 = 4k^2 + 4k + 3 = 2(2k^2 + 2k + 1) + 1$

$2k^2 + 2k + 1$ は整数であるから、$n^2 + 2$ は奇数である。

よって、対偶は真であり、もとの命題も真である。

(2) (証明)

対偶「n が偶数ならば $5n + 3$ は奇数である」を証明する。

n が偶数のとき、ある整数 k を用いて $n = 2k$ と表される。このとき

$5n + 3 = 5 \cdot 2k + 3 = 10k + 3 = 2(5k + 1) + 1$

$5k + 1$ は整数であるから、$5n + 3$ は奇数である。

よって、対偶は真であり、もとの命題も真である。

問題 3.

(1) (証明)

$1 + 2\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、$1 + 2\sqrt{2}$ は有理数である。

その有理数を r とすると、$1 + 2\sqrt{2} = r$ より $\sqrt{2} = \dfrac{r - 1}{2}$

r が有理数なら $\dfrac{r - 1}{2}$ も有理数であるから、この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

従って、$1 + 2\sqrt{2}$ は無理数である。

(2) (証明)

$-2 + 3\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、$-2 + 3\sqrt{2}$ は有理数である。

その有理数を r とすると、$-2 + 3\sqrt{2} = r$ より $\sqrt{2} = \dfrac{r + 2}{3}$

r が有理数なら $\dfrac{r + 2}{3}$ も有理数であるから、この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

従って、$-2 + 3\sqrt{2}$ は無理数である。

解答

問題 4.

(1) (証明)

$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、$\sqrt{2}$ は有理数である。

このとき、1 以外の公約数を持たない自然数 m, n を用いて

$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \cdots$ ①

と表すことができる。

① から $\sqrt{2}n = m$

この両辺を 2 乗すると

$2n^2 = m^2 \cdots$ ②

よって、m^2 は偶数である。

m^2 が偶数なら、m も偶数である。

偶数 m は、ある自然数 k を用いて、$m = 2k$ と表されるから、② に代入して

$2n^2 = 4k^2$

すなわち　$n^2 = 2k^2$

よって、n^2 は偶数となり、n も偶数となる。

これは、m, n が 1 以外の公約数を持たないことに矛盾する。

したがって、$\sqrt{2}$ は無理数である。

(2) (証明)

$\sqrt{6}$ が無理数でないと仮定すると、$\sqrt{6}$ は有理数である。

このとき、1 以外の公約数を持たない自然数 m, n を用いて

$\sqrt{6} = \dfrac{m}{n} \cdots$ ①

と表すことができる。

① から $\sqrt{6}n = m$

この両辺を 2 乗すると

$6n^2 = m^2 \cdots$ ②

よって、m^2 は偶数である。

m^2 が偶数なら、m も偶数である。

偶数 m は、ある自然数 k を用いて、$m = 2k$ と表されるから、② に代入して

$6n^2 = 4k^2$

すなわち　$3n^2 = 2k^2$

よって、n^2 は偶数となり、n も偶数となる。

これは、m, n が 1 以外の公約数を持たないことに矛盾する。

したがって、$\sqrt{6}$ は無理数である。

解答

練習 1.

(1) 逆「$xy > 0 \Rightarrow x > 0$」、偽　対偶「$xy \leqq 0 \Rightarrow x \leqq 0$」、偽　裏「$x \leqq 0 \Rightarrow xy \leqq 0$」、偽

(2) 逆「$x - y = 0 \Rightarrow x = y$」、真　対偶「$x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$」、真

裏「$x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0$」、真

練習 2.

(1) (証明)

対偶「n が奇数ならば $n^2 + 3$ は偶数である」を証明する。

n が奇数のとき、ある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表される。このとき

$n^2 + 3 = (2k+1)^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 1 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 = 2(2k^2 + 2k + 2)$

$2k^2 + 2k + 2$ は整数であるから、$n^2 + 3$ は偶数である。

よって、対偶は真であり、もとの命題も真である。

(2) (証明)

対偶「n が偶数ならば $3n + 4$ は偶数である」を証明する。

n が偶数のとき、ある整数 k を用いて $n = 2k$ と表される。このとき

$3n + 4 = 3 \cdot 2k + 4 = 6k + 4 = 2(3k + 2)$

$3k + 2$ は整数であるから、$3n + 4$ は偶数である。

よって、対偶は真であり、もとの命題も真である。

練習 3.

(1) (証明)

$2 + 4\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると、$2 + 4\sqrt{3}$ は有理数である。

その有理数を r とすると、$2 + 4\sqrt{3} = r$ より $\sqrt{3} = \dfrac{r-2}{4}$

r が有理数なら $\dfrac{r-2}{4}$ も有理数であるから、この等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

従って、$2 + 4\sqrt{3}$ は無理数である。

(2) (証明)

$-1 + 2\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると、$-1 + 2\sqrt{3}$ は有理数である。

その有理数を r とすると、$-1 + 2\sqrt{3} = r$ より $\sqrt{3} = \dfrac{r+1}{2}$

r が有理数なら $\dfrac{r+1}{2}$ も有理数であるから、この等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

従って、$-1 + 2\sqrt{3}$ は無理数である。

解答

練習 4.

(1) (証明)

$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、$\sqrt{2}$ は有理数である。

このとき、1 以外の公約数を持たない自然数 m, n を用いて

$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \cdots ①$

と表すことができる。

① から $\sqrt{2}n = m$

この両辺を 2 乗すると

$2n^2 = m^2 \cdots ②$

よって、m^2 は偶数である。

m^2 が偶数なら、m も偶数である。

偶数 m は、ある自然数 k を用いて、$m = 2k$ と表されるから、② に代入して

$2n^2 = 4k^2$

すなわち　$n^2 = 2k^2$

よって、n^2 は偶数となり、n も偶数となる。

これは、m, n が 1 以外の公約数を持たないことに矛盾する。

したがって、$\sqrt{2}$ は無理数である。

(2) (証明)

$\sqrt{10}$ が無理数でないと仮定すると、$\sqrt{10}$ は有理数である。

このとき、1 以外の公約数を持たない自然数 m, n を用いて

$\sqrt{10} = \dfrac{m}{n} \cdots ①$

と表すことができる。

① から $\sqrt{10}n = m$

この両辺を 2 乗すると

$10n^2 = m^2 \cdots ②$

よって、m^2 は偶数である。

m^2 が偶数なら、m も偶数である。

偶数 m は、ある自然数 k を用いて、$m = 2k$ と表されるから、② に代入して

$10n^2 = 4k^2$

すなわち　$5n^2 = 2k^2$

よって、n^2 は偶数となり、n も偶数となる。

これは、m, n が 1 以外の公約数を持たないことに矛盾する。

したがって、$\sqrt{10}$ は無理数である。