

問題

問題 1. 数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$(1) 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

$$(2) 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$$

$$(3) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$$

$$(4) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n + 2) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 7)$$

問題 2. 数学的帰納法を用いて、次の不等式を証明せよ。

$$(1) 3^n > 8n \quad (n \geq 3)$$

$$(2) 2^n > 5n \quad (n \geq 5)$$

$$(3) 2^n > 3n + 1 \quad (n \geq 4)$$

$$(4) 5^n > 4n + 3 \quad (n \geq 2)$$

問題 3. n は自然数とする。次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$(1) n^3 + 5n \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

$$(2) 7n^3 - n \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

$$(3) 6^n - 1 \text{ は } 5 \text{ の倍数}$$

$$(4) 4^n + 5 \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

練習

練習 1. 数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$(1) 2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{1}{2}n(3n + 1)$$

$$(2) 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$$

$$(3) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

$$(4) 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n - 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(4n - 1)$$

練習 2. 数学的帰納法を用いて、次の不等式を証明せよ。

$$(1) 5^n > 7n \quad (n \geq 2)$$

$$(2) 3^n > 4n \quad (n \geq 2)$$

$$(3) 3^n > 5n + 6 \quad (n \geq 3)$$

$$(4) 2^n > 5n - 1 \quad (n \geq 5)$$

練習 3. n は自然数とする。次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$(1) 2n^3 + n \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

$$(2) 5n^3 - 2n \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

$$(3) 8^n - 1 \text{ は } 7 \text{ の倍数}$$

$$(4) 5^n + 3 \text{ は } 4 \text{ の倍数}$$