数学I　第2章　集合と命題　確認テスト

1. 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 24 の正の約数全体の集合 A

(2) B=$\{3n-2 \mid n=0,1,2,3\cdots\}$

2. x, n は整数とする。次の 2 つの集合の関係を,$\subset, \supset, =$ のいずれかを使って表せ。

(1) $A=\{x \mid x$ は 6 の正の約数$\}$
　$B=\{x \mid x$ は 12 の正の約数$\}$

(2) $C=\{6,12,18,24,30\}$
　$D=\{6n \mid n=1,2,3,4,5\}$

3. 集合 $\{0,1,2\}$ の部分集合をすべてかけ。

4. U= $\{1,2,3,4,5,6\}$ を全体集合とし、U の部分集合 $A=\{1,2,3,4\}$、$B=\{3,6\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$　　(2) $A \cup B$

(3) $\overline{A} \cap B$　　(4) $\overline{A \cup B}$

5. x は実数とする。次の命題の真偽を求めよ。

(1) 1 は素数である。

(2) $x \leqq 0$ ならば $x \leqq 1$ である。

(3) 自然数 m に対して、m は 14 の正の約数ならば m は 28 の正の約数である。

6. 次の $\boxed{}$ に、「ア、必要条件であるが、十分条件ではない」「イ、十分条件であるが、必要条件ではない」「ウ、必要十分条件である」「エ、必要条件でも十分条件でもない」のうち、適する記号を入れよ。ただし、x, y, z は実数であるとする。

(1) $x>1$ は $x>0$ であるための $\boxed{}$

(2) $xy=0$ は $xz=0$ であるための $\boxed{}$

(3) 四角形 ABCD が正方形であることは、四角形 ABCD が長方形であるため $\boxed{}$

(4) 整数 n が 2 の倍数であることは、整数 n が 4 の倍数であるための $\boxed{}$

(5) $x=y$ は $x^2+y^2=2xy$ であるための $\boxed{}$

7. n は整数、a, b は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) 「n は偶数である」

(2) 「$a=0$ かつ $b \geqq 0$」

(3) 「a, b の少なくとも一方は有理数」

8. m, n は整数とする。次の命題の逆、対偶、裏を述べ、真偽をそれぞれ調べよ。

「m, n はともに奇数 $\Rightarrow$ $m+n$ は偶数」

9．n は整数とする。対偶を利用して，次の命題を示せ。

「n^2 が偶数ならば n は偶数である」

10．$\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法を用いて証明せよ。

数学I　第2章　集合と命題　確認テスト　解答

1. 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 24 の正の約数全体の集合 A

(解答) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

(2) B=$\{3n - 2 \mid n = 0, 1, 2, 3 \cdots\}$

(解答) $B = \{-2, 1, 4, 7 \cdots\}$

2. 次の 2 つの集合の関係を,$\subset, \supset, =$ のいずれかを使って表せ。

(1) $A = \{x \mid x$ は 6 の正の約数 $\}$

$B = \{x \mid x$ は 12 の正の約数 $\}$

(解答) $A \subset B$

(2) $C = \{6, 12, 18, 24, 30\}$

$D = \{6n \mid n = 1, 2, 3, 4, 5\}$

(解答) $C = D$

3. 集合 $\{0, 1, 2\}$ の部分集合をすべてかけ。

(解答) $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}$

4. U= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を全体集合とし、U の部分集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$、$B = \{3, 6\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B = \{3\}$　　(2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(3) $\overline{A} \cap B = \{6\}$　　(4) $\overline{A \cup B} = \{5\}$

5. 次の命題の真偽を求めよ。

(1) 1 は素数である。

(解答) 偽

(2) $x \leqq 0$ ならば $x \leqq 1$ である。

(解答) 真

(3) 自然数 m に対して、m は 14 の正の約数ならば m は 28 の正の約数である。

(解答) 真

6. 次の $\boxed{}$ に、「ア、必要条件であるが、十分条件ではない」「イ、十分条件であるが、必要条件ではない」「ウ、必要十分条件である」「エ、必要条件でも十分条件でもない」のうち、適する記号を入れよ。ただし、x, y, z は実数であるとする。

(1) $x > 1$ は $x > 0$ であるための $\boxed{\text{イ}}$

(2) $xy = 0$ は $xz = 0$ であるための $\boxed{\text{エ}}$

(3) 四角形 ABCD が正方形であることは、四角形 ABCD が長方形であるため $\boxed{\text{イ}}$

(4) 整数 n が 2 の倍数であることは、整数 n が 4 の倍数であるための $\boxed{\text{ア}}$

(5) $x = y$ は $x^2 + y^2 = 2xy$ であるための $\boxed{\text{ウ}}$

7. 次の条件の否定を述べよ。

(1) 「n は偶数である」

(解答) n は奇数である

(2) 「$a = 0$ かつ $b \geqq 0$」

(解答) $a \neq 0$ または $b < 0$

(3) 「a, b の少なくとも一方は有理数」

(解答) a, b はともに無理数

8. 次の命題の逆、対偶、裏を述べ、真偽をそれぞれ調べよ。

「m, n はともに奇数 $\Rightarrow$ $m + n$ は偶数」

(解答)

逆　$m + n$ は偶数 $\Rightarrow$ m, n はともに奇数　偽

対偶　$m + n$ は奇数 $\Rightarrow$ m, n の少なくとも一方は偶数　真

裏　m, n の少なくとも一方は偶数 $\Rightarrow$ $m + n$ は奇数　偽

9．n は整数とする。対偶を利用して、次の命題を示せ。

「n^2 が偶数ならば n は偶数である」

(証明)

対偶「n が奇数ならば、n^2 は奇数である」を証明する。

n が奇数のとき、n はある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表される。このとき、

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$2k^2 + 2k$ は整数であるから、n^2 は奇数である。

よって、対偶は真であり、もとの命題も真である。

10．$\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法を用いて証明せよ。

(証明)

「$\sqrt{2}$ は無理数でない」すなわち「$\sqrt{2}$ が有理数である」と仮定すると、$\sqrt{2}$ はある自然数 m, n を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \cdots ①$$

と表すことができる。ただし、m, n は互いに素とする。

① から $\sqrt{2}n = m$

この両辺を 2 乗すると

$$2n^2 = m^2 \cdots ②$$

よって、m^2 は偶数である。

m^2 が偶数なら、n も偶数である。

偶数 m は、ある自然数 k を用いて、$m = 2k$ と表されるから、② に代入して

$$2n^2 = 4k^2$$

すなわち　$n^2 = 2k^2$

よって、n^2 は偶数となり、n も偶数となる。

これは、m, n が互いに素であることに矛盾する。

したがって、$\sqrt{2}$ は無理数である。