

問題

問題 1. 次の関数について、第 3 次までの導関数を求めよ。

(1) $y = x^4 + 2x^2 - 1$

(2) $y = x^3 - 2x^2 + x$

(3) $y = \frac{1}{x-1}$

(4) $y = \frac{2}{x}$

(5) $y = -\sin x$

(6) $y = 2 \cos x$

(7) $y = \log 2x$

(8) $y = \log(x+1)$

(9) $y = 2e^x$

(10) $y = -e^x$

(11) $y = e^{3x}$

(12) $y = e^{\frac{1}{2}x}$

問題 2. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y = x^{n+1}$

(2) $y = 2^x$

問題 3. 次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 16$

(2) $x^2 + 4y^2 = 4$

(3) $9x^2 - y^2 = 9$

(4) $y^2 = 4x$

問題 4. x の関数が、 t を媒介変数として、次の式で表されるとき、 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x = 4t + 2, y = 3t^4$

(2) $x = t^2, y = 2t - 6$

(3) $x = \cos t, y = 2 \sin t$

(4) $x = \cos t - 1, y = \sin t + 1$

練習

練習 1. 次の関数について, 第 3 次までの導関数を求めよ。

(1) $y = x^4 - 3x^3 + x$

(2) $y = x^5 + x^3 + x$

(3) $y = \frac{1}{x+2}$

(4) $y = -\frac{1}{x}$

(5) $y = -\cos x$

(6) $y = 3 \sin x$

(7) $y = \log 3x$

(8) $y = \log(x-2)$

(9) $y = 3e^x$

(10) $y = -2e^x$

(11) $y = e^{2x}$

(12) $y = e^{-3x}$

練習 2. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y = e^{x+1}$

(2) $y = 3^x$

練習 3. 次の方程式で定められる x の関数 y について, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 36$

(2) $9x^2 + 4y^2 = 36$

(3) $x^2 - 4y^2 = 4$

(4) $y^2 = -8x$

練習 4. x の関数が, t を媒介変数として, 次の式で表されるとき, $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x = 2t - 2, y = 8t^3$

(2) $x = t^2 + 2, y = t + 1$

(3) $x = 3 \cos t, y = \sin t$

(4) $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t - 4$

解答

問題 1.

$$(1) y' = 4x^3 + 4x, y'' = 12x^2 + 4, y''' = 24x \quad (2) y' = 3x^2 - 4x + 1, y'' = 6x - 4, y''' = 6$$

$$(3) y' = -\frac{1}{(x-1)^2}, y'' = \frac{2}{(x-1)^3}, y''' = -\frac{6}{(x-1)^4}$$

$$(4) y' = -\frac{2}{x^2}, y'' = \frac{4}{x^3}, y''' = -\frac{12}{x^4}$$

$$(5) y' = -\cos x, y'' = \sin x, y''' = \cos x \quad (6) y' = -2\sin x, y'' = -2\cos x, y''' = 2\sin x$$

$$(7) y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}, y''' = \frac{2}{x^3}$$

$$(8) y' = \frac{1}{x+1}, y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}, y''' = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$(9) y' = 2e^x, y'' = 2e^x, y''' = 2e^x \quad (10) y' = -e^x, y'' = -e^x, y''' = -e^x$$

$$(11) y' = 3e^{3x}, y'' = 9e^{3x}, y''' = 27e^{3x} \quad (12) y' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}, y'' = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}, y''' = \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}x}$$

問題 2.

$$(1) y^{(n)} = (n+1)!x \quad (2) y^{(n)} = (\log 2)^n 2^x$$

問題 3.

$$(1) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (2) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \quad (3) \frac{dy}{dx} = \frac{9x}{y} \quad (4) \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

問題 4.

$$(1) \frac{dy}{dx} = 3t^3 \quad (2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t} \quad (3) \frac{dy}{dx} = -\frac{2\cos t}{\sin t} \quad (4) \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan t}$$

解答

練習 1.

$$(1) y' = 4x^3 - 9x^2 + 1, y'' = 12x^2 - 18x, y''' = 24x - 18$$

$$(2) y' = 5x^4 + 3x^2 + 1, y'' = 20x^3 + 6x, y''' = 60x^2 + 6$$

$$(3) y' = -\frac{1}{(x+2)^2}, y'' = \frac{2}{(x+2)^3}, y''' = -\frac{6}{(x+2)^4}$$

$$(4) y' = \frac{1}{x^2}, y'' = -\frac{2}{x^3}, y''' = \frac{6}{x^4}$$

$$(5) y' = \sin x, y'' = \cos x, y''' = -\sin x \quad (6) y' = 3 \cos x, y'' = -3 \sin x, y''' = -3 \cos x$$

$$(7) y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}, y''' = \frac{2}{x^3}$$

$$(8) y' = \frac{1}{x-2}, y'' = -\frac{1}{(x-2)^2}, y''' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$$(9) y' = 3e^x, y'' = 3e^x, y''' = 3e^x \quad (10) y' = -2e^x, y'' = -2e^x, y''' = -2e^x$$

$$(11) y' = 2e^{2x}, y'' = 4e^{2x}, y''' = 8e^{2x} \quad (12) y' = -3e^{-3x}, y'' = 9e^{-3x}, y''' = -27e^{-3x}$$

練習 2.

$$(1) y^{(n)} = e^{x+1} \quad (2) y^{(n)} = (\log 3)^n 3^x$$

練習 3.

$$(1) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (2) \frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y} \quad (3) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y} \quad (4) \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{y}$$

練習 4.

$$(1) \frac{dy}{dx} = 12t^2 \quad (2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t} \quad (3) \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{3 \sin t} \quad (4) \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan t}$$