

問題

問題 1. 次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束するときはその和を求めよ。

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

$$(2) \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} + \cdots$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{5} + 1} + \frac{1}{3 + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n-3}} + \cdots$$

問題 2. 次のような無限等比級数の収束, 発散を調べ, 収束するときはその和を求めよ。

(1) ① 初項 2, 公比 3

② 初項 -1 , 公比 $\frac{1}{3}$

③ $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \cdots$

④ $(\sqrt{2} - 1) + 1 + (\sqrt{2} + 1) + \cdots$

(2) ① 初項 5, 公比 $-\frac{2}{3}$

② 初項 $\sqrt{5}$, 公比 $\sqrt{5}$

③ $1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \cdots$

④ $2 + \sqrt{2} + 1 + \cdots$

問題 3. 次の無限等比数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1 + (x+2) + (x+2)^2 + \cdots$

(2) $1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots$

(3) $x + x(3-x) + x(3-x)^2 + \cdots$

(4) $x + x(x+1) + x(x+1)^2 + \cdots$

練習

練習 1. 次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束するときはその和を求めよ。

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \cdots$$

$$(2) \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \cdots$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} + \cdots$$

$$(4) \frac{1}{2+1} + \frac{1}{\sqrt{7}+2} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n-2}} + \cdots$$

練習 2. 次のような無限等比級数の収束, 発散を調べ, 収束するときはその和を求めよ。

$$(1) \textcircled{1} \text{ 初項 } 3, \text{ 公比 } 5$$

$$\textcircled{2} \text{ 初項 } \frac{1}{2}, \text{ 公比 } \frac{1}{5}$$

$$\textcircled{3} 3 - 1 + \frac{1}{3} - \cdots$$

$$\textcircled{4} 1 + (\sqrt{5} - 2) + (9 - 4\sqrt{5}) + \cdots$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ 初項 } 7, \text{ 公比 } -\frac{3}{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ 初項 } 3, \text{ 公比 } -2$$

$$\textcircled{3} 3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \cdots$$

$$\textcircled{4} (\sqrt{3} - 1) + 2 + 2(\sqrt{3} + 1) + \cdots$$

練習 3. 次の無限等比数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。

$$(1) 1 + (3-x) + (3-x)^2 + \cdots$$

$$(2) 1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots$$

$$(3) x + x(x+2) + x(x+2)^2 + \cdots$$

$$(4) x + x(4-x) + x(4-x)^2 + \cdots$$

解答

問題 1.

- (1) 収束する, 和は $\frac{1}{3}$ (2) 収束する, 和は $\frac{1}{3}$ (3) 発散する (4) 発散する

問題 2.

- (1) ① 発散 ② 収束する, 和は $-\frac{3}{4}$ ③ 収束する, 和は $\frac{5}{2}$ ④ 発散する
(2) ① 収束する, 和は 3 ② 発散する ③ 発散する ④ 収束する, 和は $4 + 2\sqrt{2}$

問題 3.

- (1) $-3 < x < -1$ (2) $0 < x < 2$ (3) $x = 0, 2 < x < 4$ (4) $-2 < x \leq 0$

練習 1.

- (1) 収束する, 和は $\frac{1}{4}$ (2) 収束する, 和は $\frac{1}{6}$ (3) 発散する (4) 発散する

練習 2.

- (1) ① 発散 ② 収束する, 和は $\frac{5}{8}$ ③ 収束する, 和は $\frac{9}{4}$ ④ 収束する, 和は $\frac{3 + \sqrt{5}}{4}$
(2) ① 収束する, 和は 4 ② 発散する ③ 収束する, 和は $\frac{15}{4}$ ④ 発散する

練習 3.

- (1) $2 < x < 4$ (2) $-2 < x < 0$ (3) $x = 0, -3 < x < -1$ (4) $x = 0, 3 < x < 5$