問題

問題１．数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(2) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

問題２．数学的帰納法を用いて、次の不等式を証明せよ。

(1) $2^n>3n$ $(n \geqq 4)$

(2) $3^n>4n+2$ $(n \geqq 3)$

問題３．数学的帰納法を用いて、次の命題を証明せよ。

(1) 「5^n-1 は 4 の倍数」

(3) 「n^3+2n は 3 の倍数」

問題４．次の問いに答えよ。

(1) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=2, a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$$

① a_2, a_3, a_4 を求めよ。

② 第 n 項 a_n を推測して、それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1, a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$$

① a_2, a_3, a_4 を求めよ。

② 第 n 項 a_n を推測して、それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

練習

練習１．数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

(2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

練習２．数学的帰納法を用いて、次の不等式を証明せよ。

(1) $2^n>2n+1$ $(n\geqq 3)$

(2) $3^n>4n$ $(n\geqq 2)$

練習３．数学的帰納法を用いて、次の命題を証明せよ。

(1) 「6^n-1 は 5 の倍数」

(3) 「n^3+5n は 3 の倍数」

練習４．次の問いに答えよ。

(1) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$$

① a_2, a_3, a_4 を求めよ。

② 第 n 項 a_n を推測して、それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1, a_{n+1}=\frac{3n}{n+1}a_n$$

① a_2, a_3, a_4 を求めよ。

② 第 n 項 a_n を推測して、それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答

問題１.

(1) 「$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$」$\cdots(A)$ とする。

(証明)

[1] $n=1$ のとき

左辺 $=2\cdot1-1=1$, 右辺 $=1^2=1$

よって、$n=1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=1+3+5+\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}\\&=k^2+2k+1=(k+1)^2=\text{右辺}\end{aligned}$$

よって、$n=k+1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2) 「$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$」$\cdots(A)$ とする。

(証明)

[1] $n=1$ のとき

左辺 $=1\cdot3=3$, 右辺 $=\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot9=3$

よって、$n=1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+k(k+2)=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)$$

が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+k(k+2)+(k+1)(k+3)\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)+(k+1)(k+3)\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+7)+6(k+3)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+13k+18)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+9)\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+7\}=\text{右辺}\end{aligned}$$

よって、$n=k+1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

解答

問題２.

(1) 「$2^n > 3n \ (n \geqq 4)$」$\cdots (A)$ とする。

(証明)

[1] $n = 4$ のとき

　左辺 $= 2^4 = 16$, 右辺 $= 3 \cdot 4 = 12$

　よって、$n = 4$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k \ (k \geqq 4)$ のとき

$$2^k > 3k$$

　が成り立つと仮定する。

　$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= 2^{k+1} - 3(k+1) \\ &= 2 \cdot 2^k - (3k+3) \\ &> 2 \cdot 3k - 3k - 3 = 3(k-1) > 0 \end{aligned}$$

　よって、$2^{k+1} > 3(k+1)$ となり、$n = k + 1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、4 以上のすべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2) 「$3^n > 4n + 2 \ (n \geqq 3)$」$\cdots (A)$ とする。

(証明)

[1] $n = 3$ のとき

　左辺 $= 3^3 = 27$, 右辺 $= 4 \cdot 3 + 2 = 14$

　よって、$n = 3$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k \ (k \geqq 3)$ のとき

$$3^k > 4k + 2$$

　が成り立つと仮定する。

　$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= 3^{k+1} - \{4(k+1) + 2\} \\ &= 3 \cdot 3^k - (4k+6) \\ &> 3 \cdot (4k+2) - 4k - 6 = 8k > 0 \end{aligned}$$

　よって、$3^{k+1} > 4(k+1) + 2$ となり、$n = k + 1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、3 以上のすべての自然数 n について (A) は成り立つ。

解答

問題３.

(1) 「$5^n - 1$ は 4 の倍数」$\cdots(A)$ とする。

(証明)

[1] $n = 1$ のとき

$5^1 - 1 = 4$

よって、$n = 1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$5^k - 1 = 4m \ (m \text{ は整数 })$$

と表せると仮定する。

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5 \cdot 5^k - 1 \\ &= 5(4m + 1) - 1 \\ &= 20m + 5 - 1 = 4(5m + 1) \end{aligned}$$

$5m + 1$ は整数なので、$5^{k+1} - 1$ も 4 の倍数となる。

よって、$n = k + 1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2) 「$n^3 + 2n$ は 3 の倍数」$\cdots(A)$ とする。

(証明)

[1] $n = 1$ のとき

$1^3 + 2 \cdot 1 = 3$

よって、$n = 1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$k^3 + 2k = 3m \ (m \text{ は整数 })$$

と表せると仮定する。

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= 3m + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= 3(m + k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

$m + k^2 + k + 1$ は整数なので、$(k+1)^3 + 2(k+1)$ も 3 の倍数となる。

よって、$n = k + 1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

解答

問題４.

(1) ① $a_2 = \dfrac{3}{2}, a_3 = \dfrac{4}{3}, a_4 = \dfrac{5}{4}$

② $a_n = \dfrac{n+1}{n} \cdots (A)$ と推測できる。

(証明)

[1] $n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

よって、$n = 1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$a_k = \frac{k+1}{k}$$

が成り立つと仮定する。

$n = k+1$ のとき

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

よって、$n = k+1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2) ① $a_2 = 1, a_3 = \dfrac{4}{3}, a_4 = 2$

② $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{n} \cdots (A)$ と推測できる。

(証明)

[1] $n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{2^0}{1} = 1$$

よって、$n = 1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$a_k = \frac{2^{k-1}}{k}$$

が成り立つと仮定する。

$n = k+1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{2k}{k+1} a_k = \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{2^{k-1}}{k} = \frac{2^k}{k+1}$$

よって、$n = k+1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

解答

練習１.

(1) 「$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$」$\cdots(A)$ とする。

(証明)

[1] $n=1$ のとき

　左辺 $=1$, 右辺 $=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

　よって、$n=1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

　が成り立つと仮定する。

　$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{1}{2}k(k+1)+k+1=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\text{右辺}\end{aligned}$$

　よって、$n=k+1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2) 「$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$」$\cdots(A)$ とする。

(証明)

[1] $n=1$ のとき

　左辺 $=1\cdot 2=2$, 右辺 $=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=2$

　よって、$n=1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

　が成り立つと仮定する。

　$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)=\text{右辺}\end{aligned}$$

　よって、$n=k+1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

解答

練習２.

(1) 「$2^n > 2n+1\ (n \geqq 3)$」$\cdots (A)$ とする。

(証明)

[1] $n=3$ のとき

　左辺 $= 2^3 = 8$, 右辺 $= 2\cdot 3+1 = 7$

　よって、$n=3$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n=k\ (k \geqq 3)$ のとき

$$2^k > 2k+1$$

　が成り立つと仮定する。

　$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
\text{左辺} - \text{右辺} &= 2^{k+1} - \{2(k+1)+1\} \\
&= 2\cdot 2^k - (2k+3) \\
&> 2\cdot(2k+1) - 2k - 3 = 2k-1 > 0
\end{aligned}$$

　よって、$2^{k+1} > 2(k+1)+1$ となり、$n=k+1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、3 以上のすべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2) 「$3^n > 4n\ (n \geqq 2)$」$\cdots (A)$ とする。

(証明)

[1] $n=2$ のとき

　左辺 $= 3^2 = 9$, 右辺 $= 4\cdot 2 = 8$

　よって、$n=2$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n=k\ (k \geqq 2)$ のとき

$$3^k > 4k$$

　が成り立つと仮定する。

　$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
\text{左辺} - \text{右辺} &= 3^{k+1} - 4(k+1) \\
&= 3\cdot 3^k - (4k+4) \\
&> 3\cdot 4k - 4k - 4 = 8k-4 > 0
\end{aligned}$$

　よって、$3^{k+1} > 4k$ となり、$n=k+1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、2 以上のすべての自然数 n について (A) は成り立つ。

解答

練習３.

(1) 「$6^n - 1$ は 5 の倍数」$\cdots(A)$ とする。

(証明)

[1] $n = 1$ のとき

$6^1 - 1 = 5$

よって、$n = 1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$6^k - 1 = 5m \ (m \text{ は整数 })$$

と表せると仮定する。

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned}6^{k+1} - 1 &= 6 \cdot 6^k - 1\\ &= 6(5m + 1) - 1\\ &= 30m + 6 - 1 = 5(6m + 1)\end{aligned}$$

$6m + 1$ は整数なので、$6^{k+1} - 1$ も 5 の倍数となる。

よって、$n = k + 1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2) 「$n^3 + 5n$ は 3 の倍数」$\cdots(A)$ とする。

(証明)

[1] $n = 1$ のとき

$1^3 + 5 \cdot 1 = 6$

よって、$n = 1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$k^3 + 5k = 3m \ (m \text{ は整数 })$$

と表せると仮定する。

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + 5(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5\\ &= (k^3 + 5k) + 3k^2 + 3k + 6\\ &= 3m + 3k^2 + 3k + 6\\ &= 3(m + k^2 + k + 2)\end{aligned}$$

$m + k^2 + k + 2$ は整数なので、$(k+1)^3 + 5(k+1)$ も 3 の倍数となる。

よって、$n = k + 1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

解答

練習 4 .

(1) ① $a_2 = \dfrac{1}{3}, a_3 = \dfrac{1}{5}, a_4 = \dfrac{1}{7}$

② $a_n = \dfrac{1}{2n-1} \cdots (A)$ と推測できる。

(証明)

[1] $n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1 - 1} = 1$$

よって、$n = 1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$a_k = \frac{1}{2k-1}$$

が成り立つと仮定する。

$n = k + 1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2a_k + 1} = \frac{\frac{1}{2k-1}}{2 \cdot \frac{1}{2k-1} + 1} = \frac{1}{2k+1}$$

よって、$n = k + 1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。

(2) ① $a_2 = \dfrac{3}{2}, a_3 = 3, a_4 = \dfrac{27}{4}$

② $a_n = \dfrac{3^{n-1}}{n} \cdots (A)$ と推測できる。

(証明)

[1] $n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{3^0}{1} = 1$$

よって、$n = 1$ のとき、(A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$a_k = \frac{3^{k-1}}{k}$$

が成り立つと仮定する。

$n = k + 1$ のとき

$$a_{k+1} = \frac{3k}{k+1} a_k = \frac{3k}{k+1} \cdot \frac{3^{k-1}}{k} = \frac{3^k}{k+1}$$

よって、$n = k + 1$ のときも、(A) は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n について (A) は成り立つ。