問題

問題 1. 次のことを証明しなさい。

(1) 連続する 2 つの奇数の積に 1 を足した数は偶数の 2 乗になる。

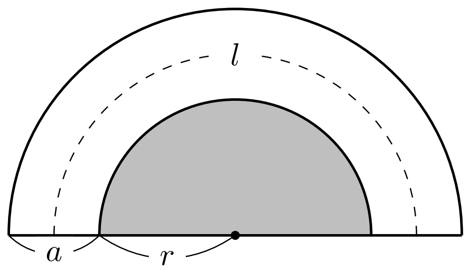
(2) 連続する 2 つの偶数で、大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗を引いた数は奇数の 4 倍になる。

(3) 連続する 3 つの整数で、最大の数の 2 乗から最小の数の 2 乗を引くと真ん中の数の 4 倍になる。

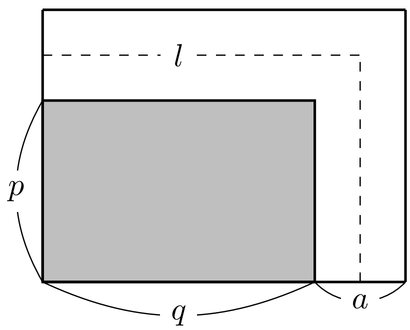
(4) 連続する 2 つの整数の積に大きい方の数を足すと大きい方の数の 2 乗になる。

問題 2. 次の問いに答えよ。

(1) 右の図のように、半径 r, 中心角 $180°$ のおうぎ形の花壇の弧に沿って、幅 a の道がついています。この道の面積を S、道の真ん中を通るおうぎ形の弧の長さを l とするとき、$S = al$ となることを証明しなさい。



(2) 縦の長さが p, 横の長さが q の長方形の花壇の上側と右側に右の図のような幅 a の道がついています。この道の面積を S、道の真ん中を通る長さを l とするとき、$S = al$ となることを証明しなさい。



練習

練習 1. 次のことを証明しなさい。

(1) 連続する 2 つの偶数で、それぞれを 2 乗した数の和に 4 を足した数は 8 の倍数になる。

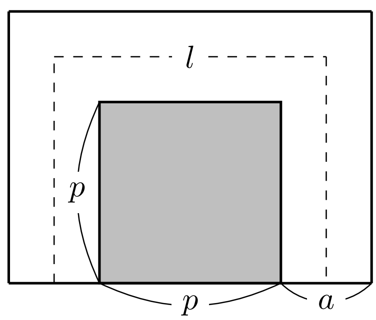
(2) 連続する 2 つの奇数で、大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗を引いた数に 4 を足した数は奇数の 4 倍になる。

(3) 連続する 3 つの整数で、最大の数の 2 乗から真ん中の数の 4 倍を引くと最小の数の 2 乗になる。

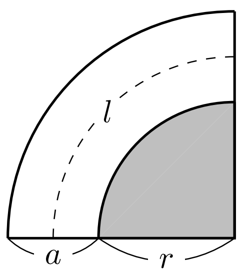
(4) 連続する 2 つの整数で、大きい方の数の 2 乗と小さい方の数の 2 乗の和は奇数になる。

練習 2. 次の問いに答えよ。

(1) 1 辺の長さが p の正方形の花壇の左側と上側と右側に右の図のような幅 a の道がついています。この道の面積を S、道の真ん中を通る長さを l とするとき、$S = al$ となることを証明しなさい。



(2) 右の図のように、半径 r, 中心角 $90°$ のおうぎ形の花壇の弧に沿って、幅 a の道がついています。この道の面積を S、道の真ん中を通るおうぎ形の弧の長さを l とするとき、$S = al$ となることを証明しなさい。



解答

問題 1.

(1) (証明)

n を整数とすると、連続する 2 つの奇数は $2n-1, 2n+1$ と表される。それらの積に 1 を足すと

$$\begin{aligned}(2n-1)(2n+1)+1 &= 4n^2-1+1 \\ &= 4n^2 \\ &= (2n)^2\end{aligned}$$

n は整数だから、$2n$ は偶数である。したがって、連続する 2 つの奇数の積に 1 を足した数は偶数の 2 乗になる。

(2) (証明)

n を整数とすると、連続する 2 つの偶数は $2n, 2n+2$ と表される。大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗を引くと

$$\begin{aligned}(2n+2)^2-(2n)^2 &= 4n^2+8n+4-4n^2 \\ &= 8n+4 \\ &= 4(2n+1)\end{aligned}$$

n は整数だから、$2n+1$ は奇数である。したがって、連続する 2 つの偶数で、大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗を引いた数は奇数の 4 倍になる。

(3) (証明)

n を整数とすると、連続する 3 つの整数は $n, n+1, n+2$ と表される。最大の数の 2 乗から最小の数の 2 乗を引くと

$$\begin{aligned}(n+2)^2-n^2 &= n^2+4n+4-n^2 \\ &= 4n+4 \\ &= 4(n+1)\end{aligned}$$

したがって、連続する 3 つの整数で、最大の数の 2 乗から最小の数の 2 乗を引くと真ん中の数の 4 倍になる。

(4) (証明)

n を整数とすると、連続する 2 つの整数は $n, n+1$ と表される。これらの積に大きい方の数を足すと

$$\begin{aligned}n(n+1)+n+1 &= n^2+n+n+1 \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

したがって、連続する 2 つの整数の積に大きい方の数を足すと大きい方の数の 2 乗になる。

解答

問題 2.

(1) (証明)

道の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \pi(a+r)^2 \times \frac{1}{2} - \pi r^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\pi(a^2+2ar+r^2) - \frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi a^2 + \pi ar \cdots ① \end{aligned}$$

道の真ん中を通るおうぎ形の弧の長さ l は

$$\begin{aligned} l &= 2\pi\left(\frac{1}{2}a + r\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\pi a + \pi r \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} al &= a\left(\frac{1}{2}\pi a + \pi r\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi a^2 + \pi ar \cdots ② \end{aligned}$$

①, ② から、

$$S = al$$

(2) (証明)

道の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= (p+a)(q+a) - pq \\ &= pq + ap + aq + a^2 - pq \\ &= a^2 + ap + aq \cdots ① \end{aligned}$$

道の真ん中を通るおうぎ形の弧の長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \left(p + \frac{1}{2}a\right) + \left(q + \frac{1}{2}a\right) \\ &= a + p + q \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} al &= a(a+p+q) \\ &= a^2 + ap + aq \cdots ② \end{aligned}$$

①, ② から、

$$S = al$$

解答

練習 1.

(1) (証明)

n を整数とすると、連続する 2 つの偶数は $2n, 2n+2$ と表される。それぞれを 2 乗した数の和に 4 を足すと

$$\begin{aligned}(2n)^2+(2n+2)^2+4&=4n^2+4n^2+8n+4+4\\&=8n^2+8n+8\\&=8(n^2+n+1)\end{aligned}$$

n^2+n+1 は整数だから、$8(n^2+n+1)$ は 8 の倍数である。したがって、連続する 2 つの偶数で、それぞれを 2 乗した数の和に 4 を足した数は 8 の倍数になる。

(2) (証明)

n を整数とすると、連続する 2 つの奇数は $2n-1, 2n+1$ と表される。大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗を引いた数に 4 を足すと

$$\begin{aligned}(2n+1)^2-(2n-1)^2+4&=(4n^2+4n+1)-(4n^2-4n+1)+4\\&=8n+4\\&=4(2n+1)\end{aligned}$$

n は整数だから、$2n+1$ は奇数である。したがって、連続する 2 つの奇数で、大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗を引いた数に 4 を足した数は奇数の 4 倍になる。

(3) (証明)

n を整数とすると、連続する 3 つの整数は $n, n+1, n+2$ と表される。最大の数の 2 乗から真ん中の数の 4 倍を引くと

$$\begin{aligned}(n+2)^2-4(n+1)&=n^2+4n+4-4n-4\\&=n^2\end{aligned}$$

したがって、連続する 3 つの整数で、最大の数の 2 乗から真ん中の数の 4 倍を引くと最小の数の 2 乗になる。

(4) (証明)

n を整数とすると、連続する 2 つの整数は $n, n+1$ と表される。大きい方の数の 2 乗と小さい方の数の 2 乗を足すと

$$\begin{aligned}(n+1)^2+n^2&=n^2+2n+1+n^2\\&=2n^2+2n+1\\&=2(n^2+n)+1\end{aligned}$$

n^2+n は整数だから、$2(n^2+n)+1$ は奇数である。したがって、連続する 2 つの整数で、大きい数の 2 乗から小さい数の 2 乗の和は奇数になる。

解答

練習 2.

(1) (証明)

道の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= (p+2a)(p+a)-p^2 \\ &= p^2+3ap+2a^2-p^2 \\ &= 2a^2+3ap \cdots ① \end{aligned}$$

道の真ん中を通るおうぎ形の弧の長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \left(p+\frac{1}{2}a\right)+(p+a)+\left(p+\frac{1}{2}a\right) \\ &= 2a+3p \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} al &= a(2a+3p) \\ &= 2a^2+3ap \cdots ② \end{aligned}$$

①, ② から、

$$S = al$$

(2) (証明)

道の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \pi(a+r)^2 \times \frac{1}{4} - \pi r^2 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\pi(a^2+2ar+r^2) - \frac{1}{4}\pi r^2 \\ &= \frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi ar \cdots ① \end{aligned}$$

道の真ん中を通るおうぎ形の弧の長さ l は

$$\begin{aligned} l &= 2\pi\left(\frac{1}{2}a+r\right)\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\pi a + \frac{1}{2}\pi r \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} al &= a\left(\frac{1}{4}\pi a + \frac{1}{2}\pi r\right) \\ &= \frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi ar \cdots ② \end{aligned}$$

①, ② から、

$$S = al$$